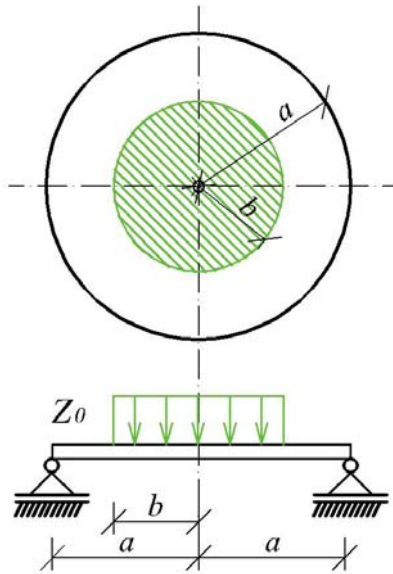


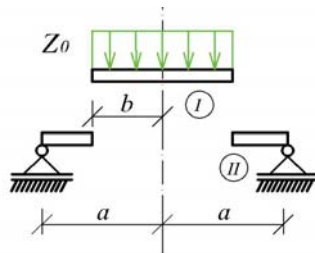
Пример 4.

За кружну плочу оптерећену константним ротационо симетричним површинским оптерећењем, приказану на слици, одредити израз за угиб.



Решење

Кружна плоча мора да се подели на два дела на месту скоковите промене површинског оптерећења:



Угиб кружне плоче **I** се усваја у облику: $w^I = \frac{Z_0}{64 \cdot K} \cdot (r^4 + A^I + C^I \cdot r^2)$. Угиб прстенасте плоче

II нема партикуларно решење (нема површинског оптерећења), а хомогено решење има све четири константе: $w^{II} = A^{II} + B^{II} \cdot \ln r + C^{II} \cdot r^2 + D^{II} \cdot r^2 \cdot \ln r$

Гранични услови:

$$r = a \begin{cases} w^{II} = 0 \dots\dots\dots(1) \\ M_r^{II} = 0 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

Прелазни услови:

$$r = b \begin{cases} w^I = w^{II} \dots\dots\dots(3) \\ \frac{dw^I}{dr} = \frac{dw^{II}}{dr} \dots\dots\dots(4) \\ M_r^I = M_r^{II} \dots\dots\dots(5) \\ T_r^I = T_r^{II} \dots\dots\dots(6) \end{cases}$$

Ако су за $r=b$ једнаки угиби и први изводи функције угиба, да би моменти савијања M_r били једнаки потребно је још да и други изводи буду једнаки па једначина (5) постаје:

$$\frac{d^2 w^I}{dr^2} = \frac{d^2 w^{II}}{dr^2} \dots\dots\dots(5).$$

Ако су за $r=b$ једнаки угиби и први и други изводи функције угиба, да би трансверзалне силе T_r биле једнаке потребно је још да и трећи изводи буду једнаки па је једначина (6):

$$\frac{d^3 w^I}{dr^3} = \frac{d^3 w^{II}}{dr^3} \dots\dots\dots(6).$$

Систем од шест једначина са шест непознатих константи чијим решавањем се добијају изрази за угиб:

- за $0 < r < b$

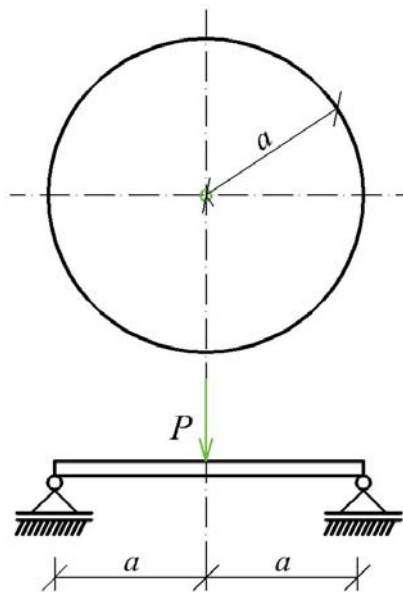
$$w^I = \frac{Z_0 \cdot b^2}{16 \cdot K} \cdot \left[\frac{r^4}{4 \cdot b^2} + r^2 \cdot \left(\frac{(1-\nu) \cdot b^2 - 4 \cdot a^2}{2 \cdot (1+\nu) \cdot a^2} + 2 \cdot \ln \frac{b}{a} \right) + \frac{4 \cdot (3+\nu) \cdot a^2 - (7+3 \cdot \nu) \cdot b^2}{4 \cdot (1+\nu)} + b^2 \cdot \ln \frac{b}{a} \right]$$

- за $b < r < a$

$$w^{II} = \frac{Z_0 \cdot b^2}{16 \cdot K} \cdot \left[\frac{3+\nu}{1+\nu} \cdot a^2 \cdot \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) - 2 \cdot r^2 \cdot \ln \frac{a}{r} - \frac{1-\nu}{2 \cdot (1+\nu)} \cdot b^2 \cdot \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) - b^2 \cdot \ln \frac{a}{r} \right]$$

Пример 5.

За кружну плочу оптерећену концентрисаном силом која делује у центру кружне плоче, приказану на слици, одредити израз за угиб и пресечне силе.



Решење

Концентрисана сила P се “размаже” на кружну површину полупречника b , па је површинско оптерећење:

$$Z_0 = \frac{P}{\pi \cdot b^2}.$$

Сада можемо да искористимо решење из *Примера 4*:

$$w = \lim_{b \rightarrow 0} w^{II} = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{Z_0 \cdot b^2}{16 \cdot K} \cdot \left[\frac{3+\nu}{1+\nu} \cdot a^2 \cdot \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) - 2 \cdot r^2 \cdot \ln \frac{a}{r} - \frac{1-\nu}{2 \cdot (1+\nu)} \cdot b^2 \cdot \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) - b^2 \cdot \ln \frac{a}{r} \right]$$

$$w = \frac{P}{16 \cdot K \cdot \pi} \cdot \left[\frac{3+\nu}{1+\nu} \cdot a^2 \cdot \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) - 2 \cdot r^2 \cdot \ln \frac{a}{r} \right].$$

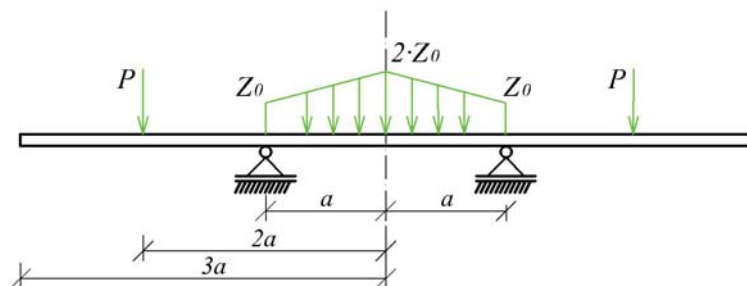
Максимални угиб јавља се у центру кружне плоче: $w_{\max}|_{r=0} = \frac{P \cdot a^2}{16 \cdot K \cdot \pi} \cdot \frac{3+\nu}{1+\nu}$

Изрази за пресечне силе:

$$M_r = \frac{(1+\nu) \cdot P}{4 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{a}{r}; \quad M_\varphi = \frac{(1+\nu) \cdot P}{4 \cdot \pi} \cdot \left(\ln \frac{a}{r} + \frac{1-\nu}{1+\nu} \right); \quad T_r = -\frac{P}{2 \cdot r \cdot \pi}$$

Пример 6.

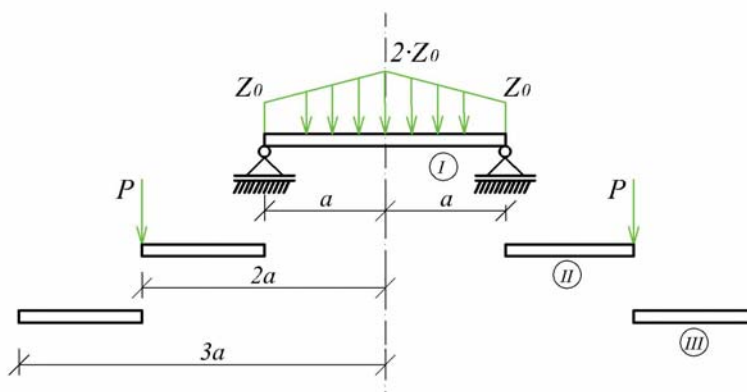
За кружну плочу оптерећену ротационо симетричним површинским оптерећењем, које се мења по линеарном закону, и линијским константним оптерећењем, приказану на слици, одредити изразе за угиб и пресечне силе.



$$\begin{aligned} E &= 30 \text{ GPa} \\ \nu &= 0.2 \\ dpl &= 0.2 \text{ m} \\ Z_0 &= 10 \text{ kN/m}^2 \\ P &= 50 \text{ kN/m} \end{aligned}$$

Решење

Кружна плоча мора да се подели на три дела:



Угиби плоча **I**, **II** и **III**:

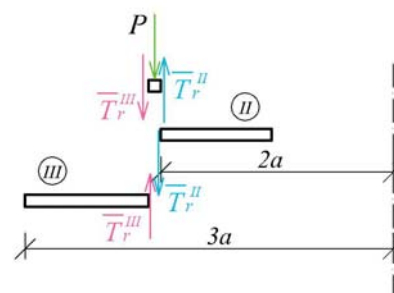
$$w^I = w_0^I + A^I + C^I \cdot r^2 = \frac{Z_0}{K} \left(\frac{r^4}{32} - \frac{r^5}{225 \cdot a} \right) + A^I + C^I \cdot r^2$$

$$w^{II} = A^{II} + B^{II} \cdot \ln r + C^{II} \cdot r^2 + D^{II} \cdot r^2 \cdot \ln r$$

$$w^{III} = A^{III} + B^{III} \cdot \ln r + C^{III} \cdot r^2 + D^{III} \cdot r^2 \cdot \ln r$$

Гранични услови:

$$r = 3a \begin{cases} T_r^{III} = 0 \dots \dots \dots (1) \\ M_r^{III} = 0 \dots \dots \dots (2) \end{cases}$$



Прелазни услови:

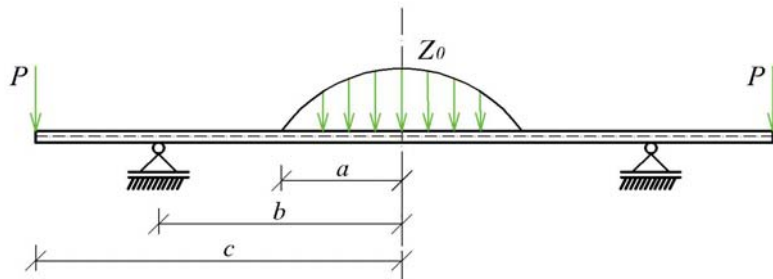
$$r = a \begin{cases} w^I = 0 \dots \dots \dots (3) \\ w^{II} = 0 \dots \dots \dots (4) \\ \frac{dw^I}{dr} = \frac{dw^{II}}{dr} \dots \dots \dots (5) \\ M_r^I = M_r^{II} \Leftrightarrow \frac{d^2 w^I}{dr^2} = \frac{d^2 w^{II}}{dr^2} \dots (6) \end{cases}$$

$$r = 2a \begin{cases} w^{II} = w^{III} \dots \dots \dots (7) \\ \frac{dw^{II}}{dr} = \frac{dw^{III}}{dr} \dots \dots \dots (8) \\ M_r^{II} = M_r^{III} \Leftrightarrow \frac{d^2 w^{II}}{dr^2} = \frac{d^2 w^{III}}{dr^2} \dots (9) \\ T_r^{II} - T_r^{III} = p \dots \dots \dots (10) \end{cases}$$

Задаци за домаћи

Пример 7.

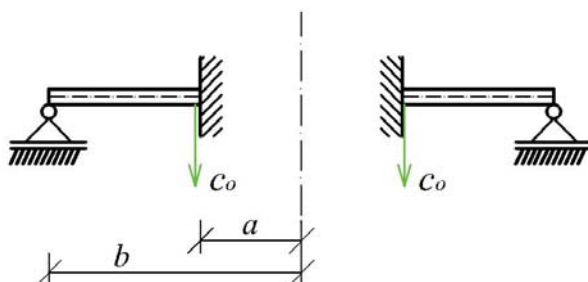
За кружну плочу оптерећену ротационо симетричним површинским оптерећењем, које се мења по закону квадратне параболе, и линијским константним оптерећењем, приказану на слици, одредити изразе за угиб и пресечне силе.



$$\begin{aligned} E &= 30 \text{ GPa} \\ \nu &= 0.2 \\ dpl &= 0.1 \text{ m} \\ Z_0 &= 30 \text{ kN/m}^2 \\ P &= 100 \text{ kN/m} \\ a &= 2 \text{ m} \\ b &= 4 \text{ m} \\ c &= 6 \text{ m} \end{aligned}$$

Пример 8.

За прстенасту кружну плочу, приказану на слици, одредити изразе за угиб и пресечне силе услед померања означеног ослонаца. Померање ослонаца има ротационо симетрични карактер.



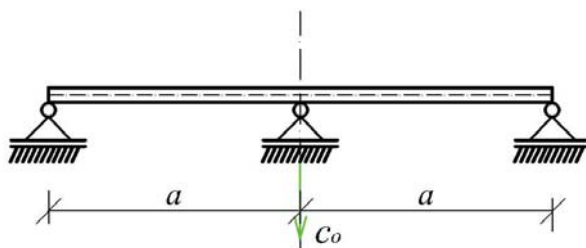
$$\begin{aligned} E &= 30 \text{ GPa} \\ \nu &= 0.2 \\ dpl &= 0.1 \text{ m} \\ a &= 2 \text{ m} \\ b &= 5 \text{ m} \\ c_o &= 1 \text{ cm} \end{aligned}$$

Пример 9.

За прстенасту кружну плочу, приказану на слици, одредити изразе за угиб и пресечне силе услед померања означеног ослонаца.

Напомена:

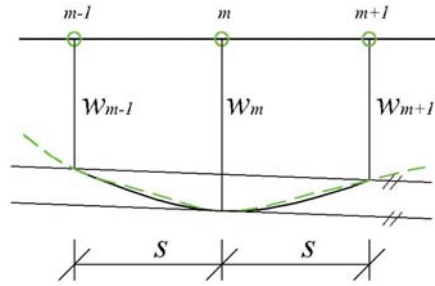
Користити решење за угиб из примера 8.



$$\begin{aligned} E &= 30 \text{ GPa} \\ \nu &= 0.2 \\ dpl &= 0.1 \text{ m} \\ a &= 5 \text{ m} \\ c_o &= 1 \text{ cm} \end{aligned}$$

Диференцини поступак

Користи се за решавање диференцијалних једначина. Интервал на коме је дефинисана тражена функција се издели на ***m*** делова. Усвоји се да је непозната функција између сваке три тачке мреже квадратна парабола.



Зеленом испрекиданом линијом је приказана стварна функција угиба, а црном линијом њена апроксимација квадратном параболом. Особина квадратне параболе је да је нагиб тангенте у тачки ***m*** једнак нагибу сечице. На основу овога изводи непознате функције угиба могу да се напишу као:

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)_m \approx \frac{w_{m+1} - w_{m-1}}{2 \cdot s}$$

$$\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)_m \approx \frac{\frac{w_{m+1} - w_m}{s} - \frac{w_m - w_{m-1}}{s}}{s}$$

$$\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)_m \approx \frac{w_{m+1} - 2 \cdot w_m + w_{m-1}}{s^2}$$

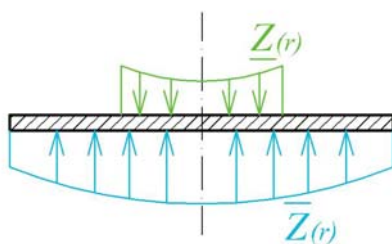
$$\left(\frac{d^3w}{dx^3}\right)_m = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right) \approx \frac{\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)_{m+1} - \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)_{m-1}}{2 \cdot s} = \frac{w_{m+2} - 2 \cdot w_{m+1} + w_m - w_m + 2 \cdot w_{m-1} - w_{m-2}}{2 \cdot s^3}$$

$$\left(\frac{d^3w}{dx^3}\right)_m \approx \frac{w_{m+2} - 2 \cdot w_{m+1} + 2 \cdot w_{m-1} - w_{m-2}}{2 \cdot s^3}$$

$$\left(\frac{d^4w}{dx^4}\right)_m = \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right) \approx \frac{\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)_{m+1} - 2 \cdot \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)_m + \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)_{m-1}}{s^2}$$

$$\left(\frac{d^4w}{dx^4}\right)_m \approx \frac{\frac{w_{m+2} - 2 \cdot w_{m+1} + w_m}{s^2} - 2 \cdot \frac{w_{m+1} - 2 \cdot w_m + w_{m-1}}{s^2} + \frac{w_m - 2 \cdot w_{m-1} + w_{m-2}}{s^2}}{s^2}$$

$$\left(\frac{d^4w}{dx^4}\right)_m \approx \frac{w_{m+2} - 4 \cdot w_{m+1} + 6 \cdot w_m - 4 \cdot w_{m-1} + w_{m-2}}{s^4}$$



$\underline{Z}(r)$ - задато спољашње оптерећење

$\bar{Z}(r)$ - реактивни отпор тла, усваја се по *Winkler*- овој претпоставци да је: $\bar{Z}_r = C \cdot w$.

C – константа (отпор) тла

Диференцијална једначина савијања кружне плоче на еластичној подлози при ротационо симетричном оптерећењу:

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \cdot \frac{dw}{dr} = \frac{Z(r)}{K} = \frac{\underline{Z}(r) - \bar{Z}(r)}{K} = \frac{\underline{Z}(r) - C \cdot w}{K}$$

Када се све непознате пребаце на леву страну добија се:

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \cdot \frac{dw}{dr} + \frac{C \cdot w}{K} = \frac{\underline{Z}(r)}{K}$$

Ова диференцијална једначина се пише преко коначних разлика у свакој тачки мреже m у којој је померање непознато:

$$\frac{1}{s^4} \cdot (w_{m+2} - 4 \cdot w_{m+1} + 6 \cdot w_m - 4 \cdot w_{m-1} + w_{m-2}) + \frac{1}{s^3 \cdot r_m} \cdot (w_{m+2} - 2 \cdot w_{m+1} + 2 \cdot w_{m-1} - w_{m-2}) -$$

$$\frac{1}{s^2 \cdot r_m^2} \cdot (w_{m+1} - 2 \cdot w_m + w_{m-1}) + \frac{1}{2 \cdot s \cdot r_m^3} \cdot (w_{m+1} - w_{m-1}) + \frac{C}{K} \cdot w_m = \frac{\underline{Z}_m}{K}$$

Лева и десна страна једначине се помноже са s^4 и $\lambda_m = \frac{s}{r_m}$:

$$(1 + \lambda_m) \cdot w_{m+2} - \left[2 \cdot (2 + \lambda_m) + \frac{\lambda_m^2}{2} \cdot (2 - \lambda_m) \right] \cdot w_{m+1} + \left(6 + 2 \cdot \lambda_m^2 + \frac{C}{K} \cdot s^4 \right) \cdot w_m -$$

$$- \left[2 \cdot (2 - \lambda_m) + \frac{\lambda_m^2}{2} \cdot (2 + \lambda_m) \right] \cdot w_{m-1} + (1 - \lambda_m) \cdot w_{m-2} = \frac{\underline{Z}_m \cdot s^4}{K}$$

r_m - полупречник у посматраној тачки мреже m

Изрази за пресечне силе преко коначних разлика:

$$M_{r,m} = -K \cdot \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \right)_m = -\frac{K}{s^2} \cdot \left[w_{m+1} \cdot \left(1 + \frac{\nu \cdot \lambda_m}{2} \right) - 2 \cdot w_m + w_{m-1} \cdot \left(1 - \frac{\nu \cdot \lambda_m}{2} \right) \right]$$

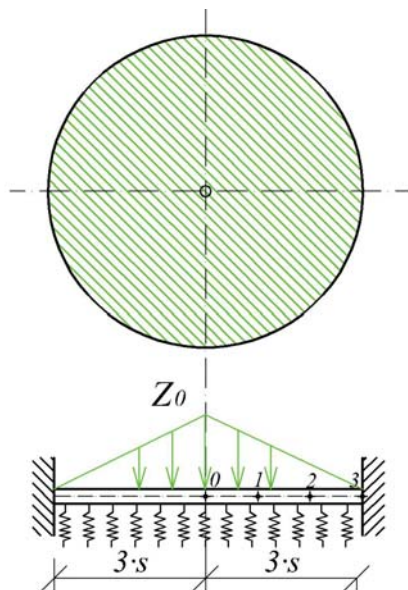
$$M_{\varphi,m} = -K \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} + \nu \cdot \frac{d^2 w}{dr^2} \right)_m = -\frac{K}{s^2} \cdot \left[w_{m+1} \cdot \left(\nu + \frac{\lambda_m}{2} \right) - 2 \cdot w_m \cdot \nu + w_{m-1} \cdot \left(\nu - \frac{\lambda_m}{2} \right) \right]$$

$$T_{r,m} = -K \cdot \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{dw}{dr} \right)_m$$

$$T_{r,m} = -\frac{K}{2 \cdot s^3} \cdot [w_{m+2} - w_{m+1} \cdot (2 - 2 \cdot \lambda_m + \lambda_m^2) - 4 \cdot \lambda_m \cdot w_m + w_{m-1} \cdot (2 + 2 \cdot \lambda_m + \lambda_m^2) - w_{m-2}]$$

Пример 1.

За кружну плочу оптерећену ротационо симетричним површинским оптерећењем која је ослоњена на еластичну подлогу, приказану на слици, одредити вредности угиба и пресечних сила у означеним тачкама мреже. За одређивање отпора тла користити *Winkler*-ову претпоставку.



$$E = 30 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0.2$$

$$dpl = 0.2 \text{ m}$$

$$s = 1.0 \text{ m}$$

$$Z_0 = 30 \text{ kN/m}^2$$

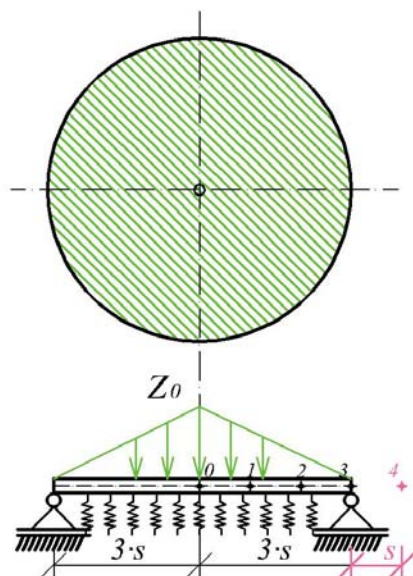
$$C = 5000 \text{ kN/m}^3$$

Решење

Задаци за домаћи

Пример 2.

За кружну плочу оптерећену ротационо симетричним површинским оптерећењем која је ослоњена на еластичну подлогу, приказану на слици, одредити вредности угиба и пресечних сила у означеним тачкама мреже. За одређивање отпора тла користити *Winkler*-ову претпоставку.



$$\begin{aligned} E &= 30 \text{ GPa} \\ \nu &= 0.2 \\ dpl &= 0.2 \text{ m} \\ s &= 1.0 \text{ m} \\ Z_0 &= 30 \text{ kN/m}^2 \\ C &= 5000 \text{ kN/m}^3 \end{aligned}$$

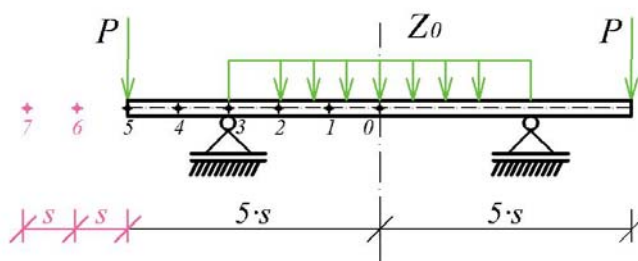
Напомена:

Када се буде писала једначина у тачки $m=2$ појавиће се и угиб у тачки 4, w_4 . Он може да се изрази у функцији угиба тачака плоче преко граничног услова:

$$r=3 \left\{ \begin{aligned} M_{r,3} = 0 &\Rightarrow -\frac{K}{s^2} \cdot \left[w_4 \cdot \left(1 + \frac{\nu \cdot \lambda_3}{2} \right) - 2 \cdot w_3 + w_2 \cdot \left(1 - \frac{\nu \cdot \lambda_3}{2} \right) \right] = 0; \quad w_4 = -\frac{1 - \frac{\nu \cdot \lambda_3}{2}}{1 + \frac{\nu \cdot \lambda_3}{2}} \cdot w_2 \end{aligned} \right.$$

Пример 3.

За кружну плочу оптерећену константним ротационо симетричним површинским и линијским оптерећењем, приказану на слици, одредити вредности угиба и пресечних сила у означеним тачкама мреже.



$$\begin{aligned} E &= 30 \text{ GPa} \\ \nu &= 0.3 \\ dpl &= 0.2 \text{ m} \\ s &= 1.0 \text{ m} \\ Z_0 &= 40 \text{ kN/m}^2 \\ P &= 120 \text{ kN/m} \end{aligned}$$

Напомена:

Када се буде писале једначине у тачкама $m=4$ и $m=5$ појавиће се и угиби у тачкама 6 и 7, w_6 и w_7 . Они могу да се изразе у функцији угиба тачака плоче преко граничних услова:

$$r=5 \left\{ \begin{aligned} T_{r,5} &= P \dots \dots \dots (1) \\ M_{r,5} &= 0 \dots \dots \dots (2) \end{aligned} \right.$$

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right)_k \approx \frac{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{k+1} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{k-1}}{2 \cdot s_x} - \text{први извод по } x \text{ другог извода по } y \text{ координати}$$

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right)_k \approx \frac{w_{l+1} - 2 \cdot w_{k+1} + w_{i+1} - w_{l-1} + 2 \cdot w_{k-1} - w_{i-1}}{2 \cdot s_x \cdot s_y^2}$$

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_k \approx \frac{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_l - 2 \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_k + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_i}{s_y^2} - \text{други извод по } y \text{ другог извода по } x \text{ координати}$$

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_k \approx \frac{4 \cdot w_k - 2 \cdot (w_l + w_i + w_{k+1} + w_{k-1}) + w_{l+1} + w_{l-1} + w_{i+1} + w_{i-1}}{s_x^2 \cdot s_y^2}$$

Ако се са α означи однос: $\alpha = \frac{s_y}{s_x}$, диференцијална једначина савијања у посматраној тачки

плоче k написана преко коначних разлика је:

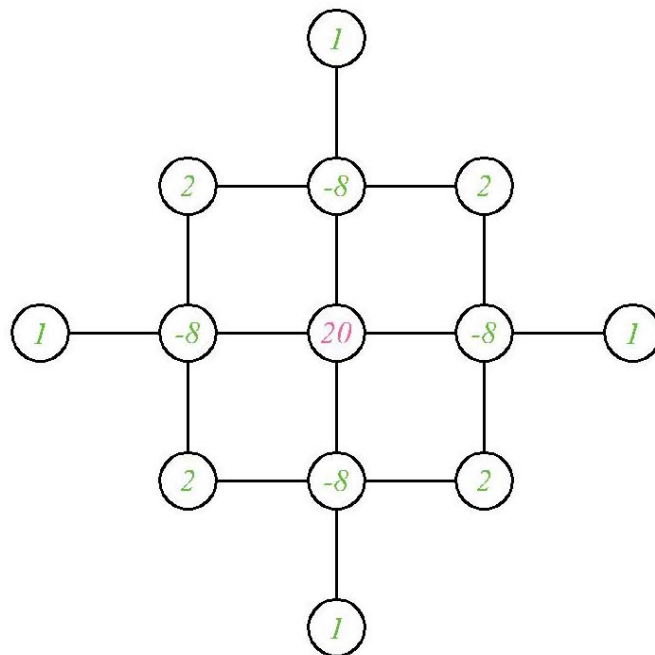
$$w_k \cdot \left[6 \cdot \left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} \right) + 8 \right] - 4 \cdot \left[(1 + \alpha^2) \cdot (w_{k+1} + w_{k-1}) + \left(1 + \frac{1}{\alpha^2} \right) \cdot (w_l + w_i) \right] +$$

$$+ 2 \cdot (w_{i-1} + w_{l-1} + w_{i+1} + w_{l+1}) + \alpha^2 \cdot (w_{k+2} + w_{k-2}) + \frac{1}{\alpha^2} \cdot (w_m + w_h) = Z_k \cdot \frac{\alpha^2 \cdot s_x^4}{K}$$

Ако је $s_x = s_y = s \Rightarrow \alpha = 1$ претходна једначина се упрошћава и постаје:

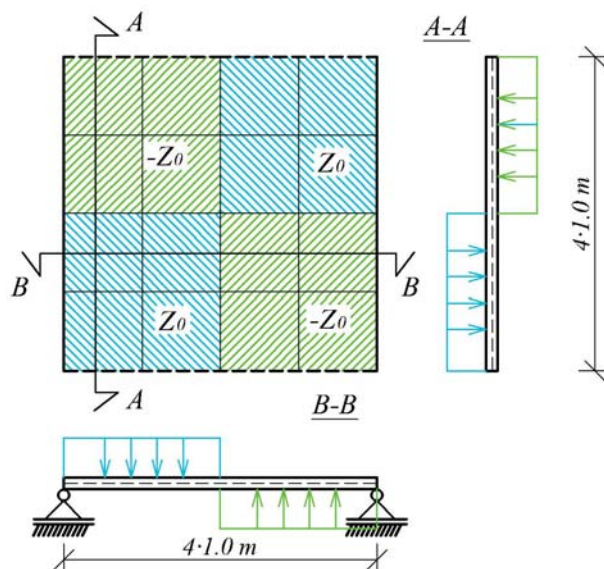
$$20 \cdot w_k - 8 \cdot (w_{k+1} + w_{k-1} + w_l + w_i) + 2 \cdot (w_{i-1} + w_{l-1} + w_{i+1} + w_{l+1}) + w_{k+2} + w_{k-2} + w_m + w_h = Z_k \cdot \frac{s^4}{K}$$

Шема коефицијената:



Пример 1.

За правоугаону плочу оптерећену константним површинским оптерећењем, приказану на слици, одредити угибе у означеним тачкама мреже.



$$\begin{aligned} E &= 30 \text{ GPa} \\ \nu &= 0.15 \\ dpl &= 0.2 \text{ m} \\ Z_0 &= 15 \text{ kN/m}^2 \end{aligned}$$

Решење